

第4章 低サイクル疲労

4-2 「ひずみ-寿命線図」の数理処理

■ 「対数」についておさらいしておこう

(4-1)章で約束したように、この節ではひずみ-寿命線図に関する実験式(回帰式)の数理処理について概説する。

但しその前に、手始めとしてひずみ-寿命線図を支えている「対数」について触れておこうと思う。

対数を習い始めた頃、算術ばかりやらされ、「なぜ対数が出現したのか?」、「どういう考えでそうしたのか?」、「使うことの旨みは何か?」など、肝心の概念や応用法などはよく分からなかった。

その後、「計算尺」、「乗除計算を加減計算で代用」、そして「音の大きさ」や「信号とノイズのSN比」等のデシベル単位表示など、それらの存在を知り対数の威力を認識した。

私なりに整理すれば、対数には以下のような効用がある。

- (1) 値が極めて大きい数や小さい数を桁数の小さい数字で代用して表現できる。例えば、
10,000の代わりに「4」、
1,000,000の代わりに「6」、
0.00001の代わりに「-5」という具合だ。
これは、数をコンパクトに圧縮・変換し、取り扱いを容易にする為である。
- (2) 「非線形性の緩和」である。「線形性への転化」と言い換えても良い。具体的には、例えば、100、1000、10000、--- の非線形の繋がりが、それぞれ、2、3、4、--- の線形性になってしまうことを意味する。
- (3) 「乗除計算から加減計算への変換」である。つまり、掛け算(割り算)を足し算(引き算)の計算に置き換えることができ、計算労力を減らすことが可能となる。例えば、
 $1,000 \times 1,000,000 = 1,000,000,000$
は、 $3 + 6 = 9$ で代用できる。

これらのからくり・原理は、実は**指数表現(べき乗)**に在る。具体的に表現すれば、10を**底**として、

$$A = 10^B \quad (4.2.1)$$

というやつだ。つまりは、大きい(小さい)数のAを指数表現に置き換え、**真数A**の代わりに**指数部B**を使ってしまおう、数

を代用してしまおう、というのがその基本思想である。

上記の(1),(2),(3)のような旨みが出てくるのでこの思想・考え方を積極的に使っていこう、というわけである。

そして、対数はその換算の手段として使われている。真数から指数部への具体的な換算式は、

$$B = \log_{10} A$$

又は、底の10を省いて

$$B = \log A \quad (4.2.2)$$

と表記される。

このように観てくると、指数表現が存在するからこそ、対数が生かされていることが解る。主役としての対数は、実は指数という脇役がいるので輝いているのだ。

因みに、(1),(2),(3)で上げた例えの数字:4, 6, -5, 2, 3, 4, などは換算式(4.2.2)から導いている。例えば、10,000と1,000,000と0.00001についてこれを適用すれば、

$$10000 = 10^4$$

$$4 = \log 10000$$

$$1000000 = 10^6$$

$$6 = \log 1000000$$

$$0.00001 = 10^{-5}$$

$$-5 = \log 0.00001$$

と、なる。

■ Log-Logスケールでの直線はべき関数を表す

それにしても、対数の意義の中で、大きな数字をその一部の小さな数で代用してしまう発想は実にユニークだ。

はたして、日常生活でこのような活用法が在るだろうか? 対数ほどの威力はないが、「名称・言葉を圧縮して使う」ことがそれに相当するかも知れない。

古風な例で大変恐縮だが、例えば、俳優の坂東妻三郎(ばん

どうつまさぶろう)をバンツマ、SMAPの木村拓哉をキムタク、日本経済団体連合会を日経連(ニッケイレン)、Non Profit OrganizationをNPO、「おはようございます」を「オース!」などの活用がこれに当たる、と解釈したい。

その実態を実態の一部で代用している点は同じ、と言えなくもない。

さて、本題に戻ろう。

ひずみ-寿命線図での実験式(回帰式)に関連して、ここで、両軸がLog-Logスケールでの直線モデルを真数で表現するとどうなるか、を説明しておこう。

図4.4に示すように傾きm、切片kで1次関数(直線)を考えよう。

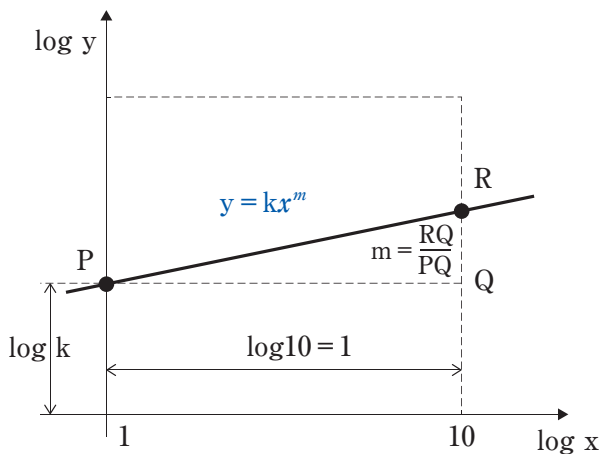


図4.4 両対数での直線表示

それぞれの軸の真数をx、yとすれば、両軸とも対数スケールであるので、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \log y &= m \log x + \log k \\ &= \log x^m + \log k \\ &= \log(k x^m) \end{aligned}$$

$$\therefore y = k x^m$$

従って、Log-Logスケールでの直線を真数で表現するとべき関数となり、切片kは係数を、傾きmは指数部を表している。

参考までに片対数表現(Y軸が対数、X軸は真数)も示しておこう。(図4.5)

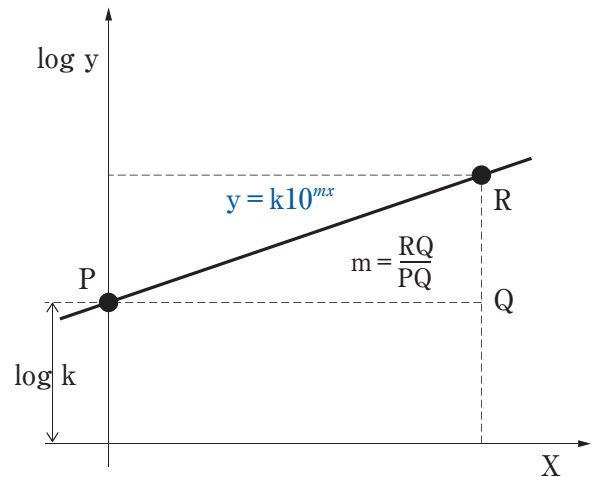


図4.5 片対数での直線表示

傾きm、切片kで1次関数(直線)を考え、それぞれの軸の真数をx、yとすれば、Y軸だけが対数スケールであるので、次のようになる。

$$\log y = mx + \log k$$

$$\therefore \log \frac{y}{k} = mx$$

log は10を底としているので、

$$10^{mx} = \frac{y}{k}$$

$$\therefore y = k 10^{mx}$$

従って、片対数スケールでの直線を真数で表現すると指数関数となる。切片kは係数を、そして傾きmは指数部の係数を表している。

尚、底を任意の数aで表現したい場合、次の式で変換できる。

$$y = k a^{(m \log_a 10)x}$$

■ 「ひずみ-寿命線図」を実験式としてどう表現するか?

以上の対数の知識を足掛かりに、この節で、ひずみ-寿命線図での実験式(回帰式)について概説しよう。

ひずみ-寿命線図の縦軸をひずみ振幅: $\Delta \varepsilon / 2$ 、横軸を交番疲労寿命: $2N_f$ と定義し直し、弾性域、塑性域、全域の回帰線

を表すと、図4.6のようになる。

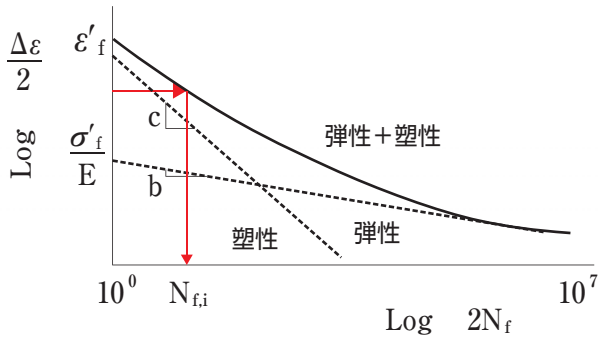


図4.6 ひずみ-寿命線図

縦軸のひずみ振幅は両振りを、そして横軸のNfは交番、即ち、引張と圧縮をそれぞれ別々のカウントを示している。

先に示したようにLog-Log対数での直線はべき関数になり、切片が係数部、傾きが指数部になるので、弾性域の回帰直線式を真数で表現すれば、以下のようになる。

$$\frac{\Delta \epsilon_e}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b \quad (4.2.3)$$

同様に、塑性域の回帰直線を真数で表現すれば、次のようになる。

$$\frac{\Delta \epsilon_p}{2} = \epsilon'_f (2N_f)^c \quad (4.2.4)$$

ここで、

σ'_f : 疲労強度係数 (Fatigue Strength Coefficient)

ϵ'_f : 疲労延性係数 (Fatigue Ductility Coefficient)

b : 疲労強度指数 (Fatigue Strength Exponent)
-0.05 ~ -0.12

c : 疲労延性指数 (Fatigue Ductility Exponent)
-0.5 ~ -0.7

を表す。

2-3章で述べたように、全ひずみ $\Delta \epsilon$ は

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon_e + \Delta \epsilon_p$$

であるので

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{\Delta \epsilon_e}{2} + \frac{\Delta \epsilon_p}{2} \quad (4.2.5)$$

この式に(4.2.3)、(4.2.4)式を代入すれば、次の式が得られる。

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \epsilon'_f (2N_f)^c \quad (4.2.6)$$

これがひずみ-寿命線図のひずみ振幅と疲労寿命の関係式で、マンソン・コフィンの式 (Manson-Coffin Equation) という。

構造体や部品に働くひずみ振幅が得られれば、この式を解くことで疲労寿命Nfを求めることができる。

その解法としては、通常、反復法、例えば、ニュートン・ラプソン (Newton-Raphson)法などが使われる。

■ 平均応力を考慮しないと充分ではない

マンソン・コフィンの式(4.2.6)を解くことで疲労寿命Nfを得ることができると分かったが、実はこの式は厳密な式ではない。

それは、平均応力の影響がこの式に反映されていないからだ。

疲労破壊を考える際、構造体・部品に働く負荷形態として、非ゼロでの平均応力と平均ひずみの存在があり、「これらが疲労寿命にどのように影響しているのか」を考慮する必要がある。

一体、どのように影響しているのであろうか？

結論的に言ってしまうと、一般的に、平均ひずみの影響は少なく、従って、その概念を無視できる。一方、平均応力の影響は顕著に表れるようだ。

平均応力に関して、データを使って手短かに説明しておこう。

図4.7は平均応力を変えた場合、疲労寿命がどう影響されるかを表した図である。

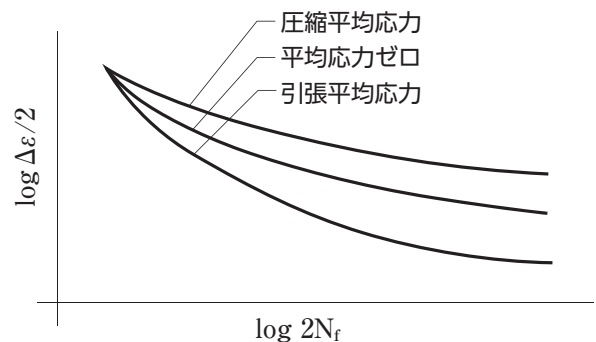


図4.7 平均応力の影響

図で示されるように引張での平均応力は疲労寿命に不利に働き、一方、圧縮平均応力は有利に働くことが分かる。

加えて、その影響度合いはひずみ振幅の大きさで違いが出る。高ひずみ振幅になる程、影響が少ないことが認識できよう。

これは、実は、高いひずみ振幅(0.5%~1.0%)の塑性ひずみ状態では**平均応力緩和**(Mean stress Relaxation)という現象がある為だ。ひずみ振幅の繰返しで、漸次、平均応力がゼロに近づいていく現象のことである。(図4.8)

なお、参考までに言えば、この平均応力緩和は前述した加工軟化とは違う現象である。

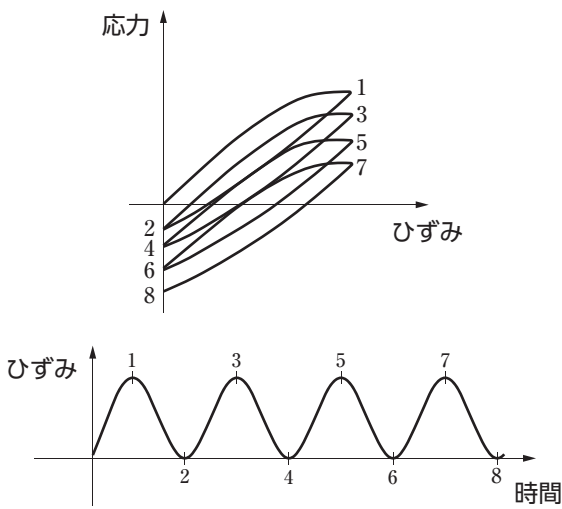


図4.8 平均応力緩和

さて、こういう次第で、図4.7で示した平均応力の影響を考慮に入れた「ひずみ-寿命線図モデル式」の修正に対する取り組みが、過去、試みられてきた。

幾つかのモデルの中から、程よく適合させたモデルとして、モロー (Morrow)が提案した**マンソン・コフィン・モローの式**(Manson-Coffin-Morrow Equation)を紹介しておこう。

これは、次式に示すように**マンソン・コフィンの式**の弾性域の項(第1項)の係数部に平均応力 σ_m を考慮して追加したものである。

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N_f)^b + \epsilon'_f (2N_f)^c \quad (4.2.7)$$

但し、平均応力 σ_m は引張応力のみ考慮する。

図化で示せば、弾性域のラインが平均応力によるひずみ換算分だけ低くなり(青色点線)、全域のラインは青色実線のようになる。(図4.9)

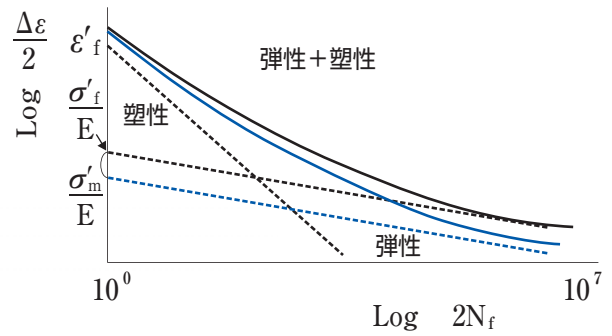


図4.9 平均応力の補正

このモデルを支える根拠は何であろう？

それは、前述したように塑性域は平均応力緩和により実質的に平均応力の概念が消えるからである。つまりは、弾性域の影響だけ考慮すれば良いというわけだ。

これにより、疲労寿命に与える影響として、ひずみ幅の大きい塑性域では影響がほとんど無く、一方、ひずみ幅の小さい弾性域での影響は反映されて、それなりに表現されていることが分かる。

実は、この平均応力の影響補正に関するモデルは他にも幾つかある。もう1つ紹介しておこう。

先に示したマンソン・コフィンの式は、ひずみ振幅と疲労寿命の関係式だが、これを「単位体積あたりのひずみエネルギー幅」 Δu と疲労寿命の関係に置き換えてみる。

$$\Delta u = \sigma \frac{\Delta \epsilon}{2}$$

であり、ここで応力 σ として、以下の最大応力 σ_{max} を導入する。

$$\sigma_{max} = \frac{\Delta \sigma}{2} + \sigma_m$$

但し、マンソン・コフィンの式は両振り試験結果に対して適用しているので、

$$\sigma_m = 0$$

であり、従って、

$$\sigma_{max} = \frac{\Delta \sigma}{2} = \sigma'_f (2N_f)^b$$

となり、これをマンソン・コフィンの式(4.2.6)に当てはめれば、次のようになる。

$$\sigma_{\max} \frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{(\sigma'_f)^2}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b+c} \quad (4.2.8)$$

ここで、実データに適用する際、上式の σ_{\max} は

$$\sigma_{\max} = \frac{\Delta \sigma}{2} + \sigma_m \quad (4.2.9)$$

と拡張解釈する。これにより、平均応力を考慮に入れることができる。

(4.2.8)式は平均応力ゼロベースで構築されたモデルであるので、(4.2.9)式により平均応力分だけひずみエネルギーが増し、それに伴って疲労寿命 N_f がより低い・小さい値に振られることになる。

但し、この考えは「単位体積あたりのひずみエネルギー振幅の繰返し」が疲労寿命に影響する、という以下の関係に基づく。

$$\sqrt{\sigma_{\max} \Delta \varepsilon} \propto N_f$$

従って、 σ_{\max} が「負」の場合は考慮されない。即ち、圧縮状態では疲労のダメージは受けないとしている。

因みに、(4.2.8)式をスミス・ワトソン・トッパーの式 (Smith, Watson, and Topper) という。

■ 煩雑な数理処理のポイントはこれだ

ここまでで、低サイクル疲労の評価判定を行うには、ひずみ-寿命関係式 (例えば、マンソン・コフィン・モローの式、スミス・ワトソン・トッパーの式) から疲労寿命を求め、それを評価判定式に当てはめることが主眼である旨を示してきた。

推算手順の骨子としてはそれだけのことだが、その為には、当然、ひずみ-寿命関係式への入力となるひずみ振幅や応力を見出さなければならない。

これ以降、そのことに関して述べていくつもりだが、実は、このひずみ幅や応力の求出部分での一連の手続きが、すこぶる煩雑、かつ難解に感じられる。要するに、この分野の処理法やその考え方が捉え難いのだ。

その為、この先の数理処理に関する理解への指針として、以下に幾つかの留意点を上げておこう。

(1) 安定化した材料特性値を如何に採るか?

2章で触れたように、塑性域まで扱うとなると、ひずみ硬化などの問題が生じ、安定化した材料特性値を得ることが重要となる。

その安定化した材料特性として代表的なものが繰返し"応力-ひずみ"曲線 (Cyclic Stress-Strain Curve) である。この繰返し"応力-ひずみ"曲線というのは、いかなる考えで形式・定式化され成り立っているのか?

(2) 実ひずみ波形よりヒステリシスループを如何に抽出するのか?

前述したようにひずみ-寿命線図は交番ひずみの繰返し、つまり、ひずみと応力に関するヒステリシスループの繰返しによって見出されたものである。

即ち、ひずみ-寿命線図を活用する為には、時刻歴の実ひずみデータの中から寿命に影響を与える元凶のヒステリシスループを探り出し、そのひずみ幅を見出さなければならない。

ところが、時刻歴のひずみデータから対象となるヒステリシスループを容易に見つけ出せないのである。抽出するにはそれなりの論理・手順が必要となる。

その論理・手順としてどのような方法があるのか?

(3) ひずみ-寿命関係式の中のひずみ振幅、応力、平均応力は如何に求めるのか。

これらを求めるには、繰返し"応力-ひずみ"曲線、および「応力-ひずみのヒステリシスループ」に関する数理処理が必要となる。その数理処理とはどういうものか?

留意点としては、主に上記の3点である。

これら(1)、(2)、(3)については、後述の(4の3)章と(4の4)章で、個別に掘り下げていこうかと思う。